Investigación de Operaciones II

IN 2012

Cadenas de Markov

Anderson, Sweeney y Williams. (2004). "Métodos cuantitativos para los negocios". México: Thomson, IX edición.

Capítulo 16

Tecnológico de Monterrey
Departamento de Ingeniería Industrial y de Sistemas
Ileana Castillo Arias, Ph.D.

Entendiendo las cadenas de Markov

- Queremos analizar la participación de mercado y la lealtad de clientes de dos tiendas, A y B.
- Cada cliente hace una compra semanal a cualesquiera de estas tiendas … pero no a ambas simultáneamente.

Nomenclatura de Markov

- “**Ensayos del proceso**” en terminología markoviana es cada una de estas compras.
- La tienda particular, A ó B, seleccionada en una semana determinada se conoce como “**estado del sistema**”.
- Los estados del sistema son “las opciones” del problema, en este caso, dos: lo que luego será “el orden de la matriz”
- En un proceso markoviano, los estados son finitos.

Los estados

- Decimos que un sistema está en estado 1 en el ensayo 3 cuando un cliente compra en A en la tercera semana.
- Decimos que un sistema está en estado 2 en el ensayo 7 cuando un cliente compra en B en la séptima semana.

Los problemas de decisión

- Conceptualizado así el problema …
  - No podemos precisar con certeza donde comprará un cliente en una semana determinada (**i.e. no podemos precisar, dado un ensayo, el estado en que se estará**.)
  - … pero con las cadenas de Markov somos capaces de calcular la probabilidad de que el cliente compre en cualesquiera de las tiendas en algún periodo determinado

Las probabilidades

- Para calcular las probabilidades de los diversos estados que ocurren en ensayos sucesivos, necesitamos información
  - sobre la probabilidad de que un cliente permanezca con la tienda, o,
  - la probabilidad de que un cliente cambie de tienda conforme pasan los periodos.

El estudio para anticipar patrones

- Imaginemos que estudiamos a 100 personas durante un periodo de 10 semanas.
- El estudio es muy representativo
- … y este estudio genera **un patrón de comportamiento** de los clientes.

La clave de Markov

- La gran premisa de Markov es que la probabilidad de seleccionar un estado en un ensayo dado …
- … solamente está en función del estado que fue seleccionado en el ensayo anterior.

Ejemplo de cadenas de Markov

Siguiendo con el estudio. Suponga que se construye la siguiente matriz de probabilidades P:

	A	B
A	.90	.10
B	.20	.80

… el 90% de los clientes que compraron en A en una semana siguieron comprando en A para la siguiente semana … pero el 20 % de los clientes de B se cambiaron a A en la siguiente semana.

Probabilidades de transición

- Como las probabilidades dadas anteriormente pueden modificarse en la transición de un estado a otro, a estas probabilidades se les conoce con el nombre de “**probabilidades de transición**”.
- $p_{i,j}$ probabilidad de hacer una transición del estado i, en un periodo dado, al estado j en el siguiente periodo.
- Por fila, -y según nuestro enfoque- la suma de las probabilidades de transición es la unidad.

La probabilidad de estado

Y, ¿cómo sabremos las probabilidades de transición para el siguiente periodo?

- Sea π_i (n) la probabilidad de que el sistema esté en el estado i en el periodo n
- π_i (n) se conoce con el nombre de "**probabilidad de estado**"

Probabilidades de estado

$$[\pi_1(0), \pi_2(0)] = [1,0]$$

significa una condición inicial donde un cliente compró en la semana cero en la tienda A.

$$[\pi_1(0), \pi_2(0)] = [0,1]$$

significa una condición inicial donde un cliente compró en la semana cero en la tienda B.

Probabilidades de estado

Luego,

- $[\pi_1(1), \pi_2(1)] = [\pi_1(0), \pi_2(0)] * P$
- Donde P es la matriz de probabilidades de transición.
- Si se hace el análisis mirando a un cliente que compró, en la última semana en A, entonces …
  - $[\pi_1(1), \pi_2(1)] = [1, 0]* \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

$= [0.9, 0.1]$

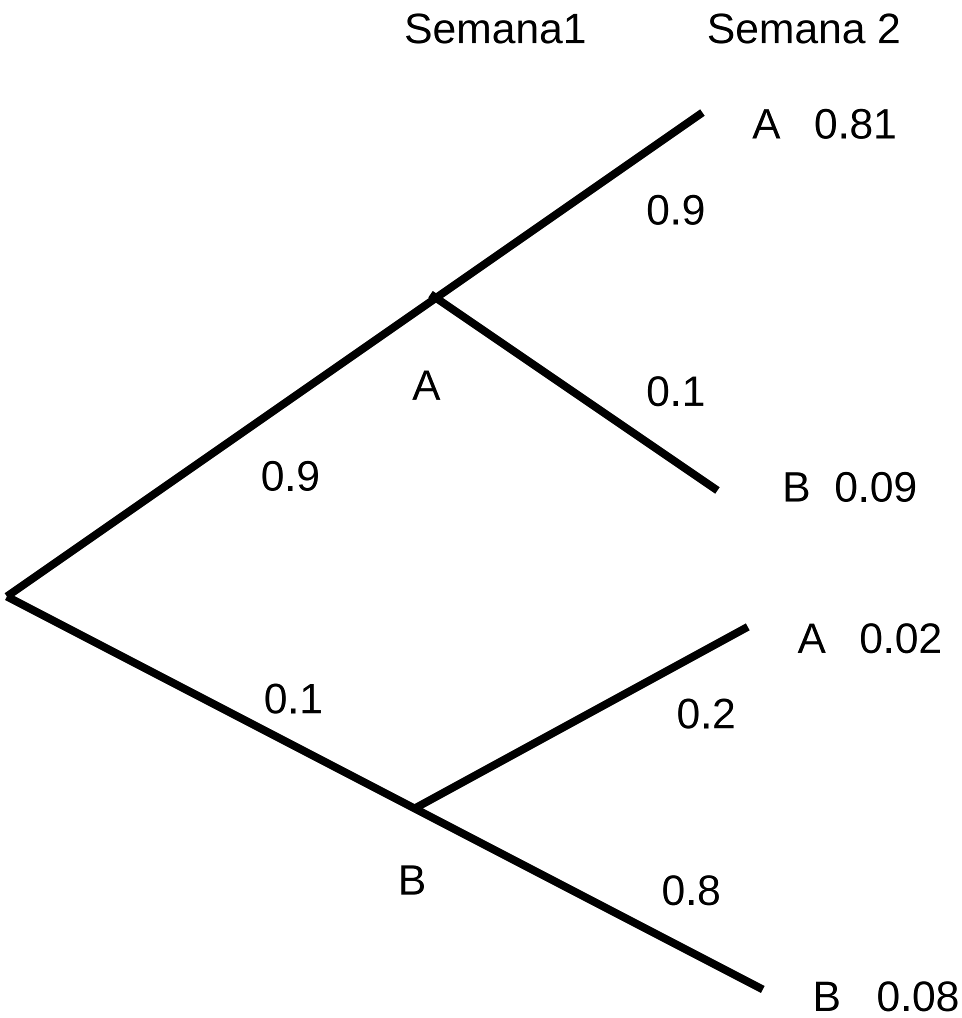
Ejemplo de cadenas de Markov

- $[\pi_1(2), \pi_2(2)] = [0.9, 0.1] * \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

  $= [\ 0.83, 0.17]$

- En un árbol de decisión se aprecian mucho mejor estas probabilidades de estado. Si un cliente compró por ultima vez en A,
  - 0.9*0.9 + 0.1*0.2 = 0.83
  - 0.9*0.1 + 0.1*0.8 = 0.17

El árbol



Ejemplo de cadenas de Markov

Corrobore que …

- $[\pi_1(3), \pi_2(3)] = [0.781, 0.219]$
- $[\pi_1(5), \pi_2(5)] = [0.723, 0.277]$
- $[\pi_1(10), \pi_2(10)] = [0.676, 0.324]$

Ejemplo de cadenas de Markov

Si ahora se comienza con un cliente que compró en la última semana en B,

- $[\pi_1(1), \pi_2(1)] = [0.2, 0.8]$
- $[\pi_1(5), \pi_2(5)] = [0.555, 0.445]$
- $[\pi_1(10), \pi_2(10)] = [0.648, 0.352]$

Convergencias

Note que

- Si se comienza con un cliente que compró en la última semana en A,

$$[\pi_1(10), \pi_2(10)] = [0.676, 0.324]$$

- Si se comienza con un cliente que compró en la última semana en B,

$$[\pi_1(10), \pi_2(10)] = [0.648, 0.352]$$

… se tiende a una convergencia …

Probabilidad de estado estable

- Sea π_i la probabilidad de convergencia del estado *i*
- π_i se denomina la probabilidad del estado estable *i*
- Se obtienen mediante álgebra sencilla

Probabilidad de estado estable

$[\ \pi_1\ ,\ \pi_2\ ] = [\ \pi_1\ ,\ \pi_2\ ] * P$

$\rightarrow [\ \pi_1\ ,\ \pi_2\ ] = [\ \pi_1\ ,\ \pi_2\ ] * \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$

- Resolviendo

$\pi_1 = 0.90\ \pi_1 + 0.20\ \pi_2$

$\pi_2 = 0.10\ \pi_1 + 0.80\ \pi_2$

$\pi_1 + \pi_2 = 1$

Se tiene que:

$\pi_1 = 2 / 3$

$\pi_2 = 1 / 3$

Probabilidad de estado estable

Estas probabilidades pueden interpretarse como que, “en el futuro”, de cada 100 clientes que compran, 67 comprarán en A.

Ejemplo de la bebida de cola

Suponga que toda la industria de bebidas de cola produce sólo dos. Dado que una persona la última vez compró cola 1, hay 90% de probabilidades de que su siguiente compra sea cola 1. Dado que la última compra de una persona fue cola 2, hay 80% de probabilidades de que su siguiente compra sea cola 2.

1 Si una persona en la actualidad es comprador de cola 2, ¿cuál es la probabilidad de que compre cola 1 dos veces a partir de ahora?

2 Si una persona en la actualidad es comprador de cola 1, ¿cuál es la probabilidad de que compre cola 1 tres ocasiones a partir de ahora?

Vemos las compras de cada persona como una cadena de Markov con el estado, en cualquier tiempo dado, del tipo de cola que compró la persona en la última vez. Así, las compras de cada individuo pueden representarse como una cadena de Markov de dos estados, donde

Estado 1 = La persona compró cola del tipo 1 la última vez.

Estado 2 = La persona compró cola del tipo 2 la última vez.

Si se define $\mathbf{X}_n$ como el tipo de cola que una persona compra en su n-ésima compra futura (compra actual de cola = $\mathbf{X}_0$), entonces $\mathbf{X}_0, \mathbf{X}_1, \ldots$ se podría describir como la cadena de Markov con la siguiente matriz de transición:

$$P = \begin{array}{c} \\ \text{Cola 1} \\ \text{Cola 2} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{Cola 1} & \text{Cola 2} \end{array} \\ \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ahora se pueden contestar las preguntas 1 y 2.

1 Se busca $P(\mathbf{X}_2 = 1|\mathbf{X}_0 = 2) = P_{21}(2) =$ elemento 21 de P^2:

$$P^2 = \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} .90 & .10 \\ .20 & .80 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} .83 & .17 \\ .34 & .66 \end{bmatrix}$$

Por consiguiente, $P_{21}(2) = .34$. Esto significa que la probabilidad de que un bebedor de cola 2 en el futuro compre dos veces cola 1 es .34. Mediante la teoría de probabilidad básica, se podría obtener esta respuesta de una manera distinta (véase la figura 4). Observe que $P_{21}(2) =$ (probabilidad de que la siguiente compra sea cola 1 y la segunda compra sea cola 1) + (probabilidad de que la siguiente compra sea cola 2 y la segunda compra sea cola 1) $= p_{21}p_{11} + p_{22}p_{21} = (.20)(.90) + (.80)(.20) = .34$.